ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ MINH HẰNG

VỀ LÍ THUYẾT HÀM PHỨC TRONG MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐA THỨC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ MINH HẰNG

VỀ LÍ THUYẾT HÀM PHỨC TRONG MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐA THỨC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. NGUYỄN TRƯỜNG THANH

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Một số ký hiệu và chữ viết tắt

$\mathbb{N}$	tập các tự nhiên
$\overline{1,n}$	tập số 1,2,...,n
$\mathbb{R}, \mathbb{R}^+$	tập các số thực, số thực không âm tương ứng
$\mathbb{C}$	tập các số phức
$z, \bar{z}$	số phức z và số phức liên hợp của số phức z
Rez, Imz	phần thực và phần ảo tương ứng của số phức z
$\square$	kết thúc chứng minh của định lí, hệ quả, ví dụ và lời giải

Lời nói đầu

Giải tích phức xuất hiện từ thế kỉ thứ 18, là lý thuyết về các hàm một biến số phức. Giải tích phức được sử dụng trong hình học đại số, lý thuyết số, toán học ứng dụng; cũng như trong thủy động lực học, nhiệt động lực học, và cơ học lượng tử ... Các nhà toán học Euler, Gauss, Riemann, Cauchy, Weierstrass, và nhiều hơn nữa trong thế kỷ 20 đã có những đóng góp quan trọng đến các lý thuyết hàm số phức.

Trong toán học, đa thức là một biểu thức bao gồm các biến và các hệ số, chỉ liên quan đến các phép toán cộng, trừ, nhân và lũy thừa số nguyên không âm của các biến. Đa thức xuất hiện trong nhiều lĩnh vực toán học và khoa học là một trong những khái niệm lâu đời nhất trong toán học. Tuy nhiên, ký hiệu phổ biến về đa thức mà chúng ta sử dụng ngày nay chỉ được phát triển bắt đầu từ thế kỷ 15. Trước đó, các phương trình đa thức đã được viết ra bằng lời. Ví dụ, một bài toán đại số từ Số học Trung Quốc, khoảng năm 200 trước Công nguyên, "Ba bó lúa của vụ mùa tốt, hai bó lúa của cây trồng tầm thường, và một bó lúa của vụ mùa xấu được bán với giá 29 lần." Chúng ta sẽ viết 3x + 2y + z = 29.

Việc ứng dụng số phức vào các bài toán sơ cấp đã và đang được nhiều nhà toán học quan tâm. Lý thuyết hàm phức thể hiện là một công cụ đầy tiềm năng và hiệu quả, khi đưa ra những lời giải độc đáo và ngắn gọn cho nhiều bài toán sơ cấp. Theo hiểu biết của tác giả, việc ứng dụng số phức vào các bài toán sơ cấp về đa thức đã và đang được nhiều nhà toán học quan tâm, tuy nhiên công việc này vẫn chưa được hệ thống một cách đầy đủ. Chính vì lý do này, tác giả mạnh dạn hệ thống lại trong luận văn một số kiến thức cơ bản của lý thuyết hàm biến phức và áp dụng chúng để giải một số lớp bài toán sơ cấp về đa thức.

Luận văn được chia làm hai chương với những nội dung chính như sau:

Chương 1, chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả cơ bản về lí thuyết hàm phức.

Chương 2, chúng tôi sử dụng lí thuyết hàm phức trong việc giải quyết một số dạng bài toán đa thức như phân tích đa thức, bài toán phương trình hàm đa thức, bài toán chia hết.

Để hoàn thành luận văn này, ngoài sự nỗ lực học hỏi của bản thân, em đã nhận được rất nhiều sự quan tâm, giúp đỡ. Với tình cảm chân thành em xin gửi lời cảm ơn sâu sắc nhất tới TS. Nguyễn Trường Thanh - người Thầy đã tận tình hướng dẫn, chỉ bảo, truyền đạt những kiến thức và kinh nghiệm quý báu cho em trong suốt quá trình học tập và hoàn thiện luận văn.

Em xin gửi lời cảm ơn đến các thầy cô giáo của trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, những người đã trực tiếp tham gia giảng dạy lớp Cao học Toán K12 khóa 2018 - 2020, các phòng ban chức năng, Khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã giúp đỡ và tạo điều kiện cho em trong thời gian học tập vừa qua.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành đến tập thể lớp K12, gia đình, bạn bè và đồng nghiệp đã luôn động viên, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thành khóa luận này.

Thái Nguyên, ngày 02 tháng 10 năm 2019

Tác giả luận văn

NGUYỄN THỊ MINH HẰNG

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Chương 1, chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả cơ bản về lí thuyết hàm phức. Các khái niệm và kết quả trong chương 1 được tham khảo trong các tài liệu [1, 2, 3, 6, 7].

1.1 Số phức

Số phức là số có thể viết dưới dạng $a + ib$, trong đó a và b là các số thực, i là đơn vị ảo, với $i^2 = -1$ hay $i = \sqrt{-1}$. Số phức là sự mở rộng của số thực. Việc mở rộng trường số phức để giải những bài toán mà không thể giải trong trường số thực. Số phức được sử dụng trong nhiều lĩnh vực khoa học, như khoa học kỹ thuật, điện từ học, cơ học lượng tử, toán học ứng dụng chẳng hạn như trong lý thuyết hỗn loạn.

Nhà toán học người Ý Gerolamo Cardano là người đầu tiên có công giới thiệu về số phức. Ông sử dụng số phức để giải các phương trình bậc ba trong thế kỉ 16. Nhà toán học người Ý R. Bombelli (1526-1573) đã đưa định nghĩa đầu tiên về số phức, lúc đó được gọi là số "không thể có" hoặc "số ảo" trong công trình Đại số (Bologne, 1572) công bố ít lâu trước khi ông mất. Ông đã định nghĩa các số đó (số phức) khi nghiên cứu các phương trình bậc ba và đã đưa ra căn bậc hai của -1.

Nhà toán học người Pháp D'Alembert vào năm 1746 đã xác định được dạng tổng quát $a + ib$ của chúng, đồng thời chấp nhận nguyên lý tồn tại nghiệm phức của một đa thức hệ số phức. Nhà toán học Thụy Sĩ L. Euler (1707-1783) đã đưa ra ký hiệu " i " để chỉ căn bậc hai của -1, năm 1801 Gauss đã dùng lại ký hiệu này trong các công trình của ông. [1]

[1] Giới thiệu về số phức được tham khảo tài liệu [6]

Định nghĩa 1.1.1. Số phức được hiểu là các cặp theo thứ tự (x, y). Chúng ta kí hiệu số phức z

$$z = (x, y), \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Chúng ta quy ước

$$x = Re\ z,\ y = Im\ z.$$

lần lượt được gọi là phần thực và phần ảo của số phức z. Tập các số phức được kí hiệu

$$\mathbb{C} = \{z = (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Tổng $z_1 + z_2$ và tích $z_1 z_2$ của hai số phức $z_1 = (x_1, y_1),\ z_2 = (x_2, y_2)$, được định nghĩa

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \qquad z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Nếu không có gì nhầm lẫn chúng ta đồng nhất số thực x bởi các số phức $(x, 0)$, và số thuần ảo $i = (0, 1)$, thì số phức được biểu diễn dưới dạng chính tắc

$$z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}.$$

Ngoài ra, chúng ta cũng biểu diễn số phức dưới dạng lượng giác

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi},$$

trong đó

- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ là mô đunl của số phức z,
- $\arg(z) = \varphi$ là góc theo chiều dương từ tia Ox tới tia Oz.

Ví dụ 1.1.2. Xét số phức dưới dạng chính tắc $z = 1 + i$. Chúng ta tìm được

$$Rez = Imz = 1,\ |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Số phức $z = 1 + i$ được biểu diễn trong mặt phẳng có tọa độ (1,1). Do đó,

$$\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Từ đây, chúng ta có biểu diễn lượng giác của số phức

$$z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

$\square$

Từ biểu diễn chính tắc, các phép toán số phức được viết lại

1. Phép cộng. $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$,

2. Phép nhân. $z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

Bên cạnh các phép toán cộng và nhân, chúng tôi cũng đề cập tới các phép toán khác của số phức như phép chia, phép lấy căn bậc, ..., và một số tính chất của chúng.

3. Phép chia.

Nếu $z_1 = wz_2,\ z_2 \neq 0, w \in \mathbb{C}$, thì chúng ta kí hiệu phép chia giữa 2 số phức z_1 và z_2, là

$$\frac{z_1}{z_2} = w.$$

4. Phép lấy căn bậc n

Nếu $z_0 = w^n,\ w \in \mathbb{C}$, thì chúng ta kí hiệu căn bậc n của số phức z_0 là

$$\sqrt[n]{z_0} = w.$$

5. Dấu bằng

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} Re\ z_1 & = Re\ z_2, \\ Im\ z_1 & = Im\ z_2. \end{cases}$$

Một số tính chất khác của số phức.
Giả sử các số phức sau có biểu diễn

$$z_1 = x_1 + iy_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$

$$z_2 = x_2 + iy_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

và các số phức liên hợp

$$\bar{z}_1 = x_1 - iy_1,\ \bar{z}_2 = x_2 - iy_2.$$

Khi đó

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,\ \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

- $\bar{z}_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1),\ \bar{z}_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)$.

- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,\ |z_1 z_2| = |z_1||z_2|,\ |z_1 \bar{z}_1| = |z_1|^2.$

- $z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos[\varphi_1 + \varphi_2] + i\sin[\varphi_1 + \varphi_2]).$

- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}(\cos[\varphi_1 - \varphi_2] + i\sin[\varphi_1 - \varphi_2])$, với $z_2 \neq 0$.

1.2 Hàm phức

Định nghĩa 1.2.1. Giả sử S là một tập con của tập các số phức $\mathbb{C}$. Hàm $f : S \to \mathbb{C}$ được định nghĩa trên S là quy tắc gán với mỗi z trong S một số phức w. Số w được gọi là giá trị của f tại z và được ký hiệu là $f(z)$.

Đặt
$$z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}.$$
Chúng ta có thể biểu diễn $f(z)$ bởi một cặp hàm có giá trị thực của các biến thực x và y:
$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$
Ví dụ. Xét hàm phức $f(z) = z^2$ trên tập số phức $\mathbb{C}$.

Khi $z = x + iy$, chúng ta có
$$f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy = u + iv,$$
trong đó các hàm hai biến
$$u = x^2 - y^2,\ v = 2xy.$$
□

Một số hàm phức cơ bản.

1. Hàm đa thức bậc n
$$P(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n,$$
trong đó $c_i \in \mathbb{C},\ c_n \neq 0,\ i = 0, 1, \ldots, n.$

2. Hàm mũ cơ số e
$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y),$$
trong đó $z = x + iy \in \mathbb{C},\ x, y \in \mathbb{R}.$